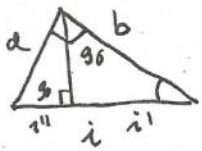
Teorema Pitagora – prima lezione terza

1] Teorema di Pitagora



$$i : b = b : i' \Rightarrow \frac{i}{b} = \frac{b}{i'}$$

$$\Downarrow$$

$$i\,i' = b^2 \quad \text{1° Teorema di Euclide}$$

$$i : a = a : i'' \Rightarrow \frac{i}{a} = \frac{a}{i''}$$

$$\Downarrow$$

$$i\,i'' = a^2 \quad \text{1° Teorema di Euclide}$$

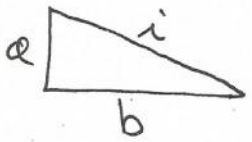
addesso si ha $i\,i' + i\,i'' = a^2 + b^2$

cioè $i\,(\underbrace{i' + i''}_{i}) = a^2 + b^2$

quindi $i^2 = a^2 + b^2$ Teorema di Pitagora

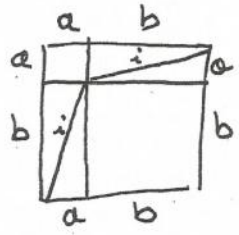
questa è probabilmente la dimostrazione detta da Talete o Pitagora del teorema di Pitagora. In realtà una tavoletta (Tavoletta di Tell Harmal) in cuneiforme riporta il disegno iniziale, questo fa pensare che forse il teorema fosse già noto nel 2000 a.C., quindi molto prima di Talete e Pitagora a cui si fa risalire la teoria delle proporzioni e il teorema di Pitagora.

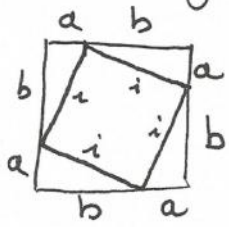
Probabilmente Talete e Pitagora osservarono la generalizzazione del Teorema che risulta vero se si costruiscono sui cateti e l'ipotenusa poligoni regolari.
Durante la lezione noi abbiamo sviluppato la seguente dimostrazione.
Consideriamo il triangolo rettangolo



in figura di cateti a, b ed ipotenusa i

Consideriamo i seguenti quadrati di lato $a+b$





avendo lo stesso lato $l = a+b$ hanno la stessa area l^2

dalla prima figura si ha

$$l^2 = a^2 + b^2 + 4\,\frac{a \cdot b}{2} = a^2 + b^2 + 2ab \qquad (*)$$

dalla seconda figura si ha

$$l^2 = i^2 + 4\,\frac{ab}{2} = i^2 + 2ab \qquad (**)$$

dalle relazioni (*) e (**) segue che

$$i^2 + 2ab = l^2 = l^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

dalla proprietà transitiva dell'uguaglianza.

3] otteniamo

$$i^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2ab$$

e dunque $\boxed{i^2 = a^2 + b^2}$ Teo di Pitagora

Ricordiamo alcune proprietà che abbiamo usato $l^2 = l \cdot l$

Più in generale vale la seguente definizione

Def (Potenza) Se $a \in \mathbb{Q}$ (cioè a è un numero razionale) allora se $a \neq 0$ abbiamo

$a^0 = 1$

$a^1 = a$

$a^n = \underbrace{a \cdot a \dots a}_{n\text{-volte}}$, $n \geq 2$ e $n \in \mathbb{N}$

Possiamo inoltre generalizzare questa definizione considerando esponenti negativi, cioè

def: $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$

Vale il seguente Teorema

Teorema (Proprietà delle potenze)
Se $a, b \in \mathbb{Q}$ e $a, b \neq 0$ allora per ogni $N, M \in \mathbb{Z}$ si ha

i) $a^N \cdot a^M = a^{N+M}$

ii) $a^N : a^M = \frac{a^N}{a^M} = a^{N-M}$

iii) $[a^N]^M = a^{N \cdot M}$

iv) $a^N \cdot b^N = (a \cdot b)^N$

v) $a^N : b^N = \frac{a^N}{b^N} = \left(\frac{a}{b}\right)^N$

Queste 5 proprietà sono fondamentali per poter eseguire calcoli numerici e letterali.

Un'altra osservazione importante è legata alla relazione (*) $\ell^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
noi sappiamo che $\ell = a + b$ quindi la (*) dimostra che vale il seguente prodotto notevole

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Riportiamo alcuni prodotti notevoli che sono uno strumento utile nel calcolo letterale.

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (diff. di quadrati o somma · diff.)

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (quadrato binomio)

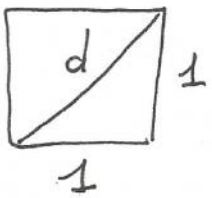
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (cubo binomio)

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ somma cubi

$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ diff. cubi

Terminiamo con un'ultima osservazione sul teorema di Pitagora.
Se consideriamo un quadrato di lato unitario, cioè $l = 1$, allora dal Teorema di Pitagora si ha che $d^2 = 1^2 + 1^2$, cioè



$$\boxed{d^2 = 2}$$

Questo ci porta ad affermare che esiste un numero ξ tale che $\xi^2 = 2$ questo numero viene indicato con $\xi = \sqrt{2}$.

6] Quindi $\sqrt{2}$ è quel numero che al quadrato fa 2 [$(\sqrt{2})^2 = 2$] e rappresenta la lunghezza della diagonale del quadrato di lato 1.
Inoltre semplici osservazioni geometriche ci fanno ottenere che $\boxed{1 < \sqrt{2} < 2}$.
Quindi $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$, $\sqrt{2}$ non è un numero intero, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$.
Problema: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$?
cioè $\sqrt{2}$ è una "frazione"?
La risposta a questa domanda è No
$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Esercizio: Provare a dimostrare la generalizzazione del Teorema di Pitagora ai poligoni regolari costruiti su cateti e ipotenusa.

Suggs: Sfruttare le similitudini (Proporzioni)