

V BLL (Appunti)1

definizione (parziale) di funzione

Siano A e B due insiemi una funzione

$f: A \rightarrow B$ è una "regola" che ad ogni elemento $a \in A$ associa un solo elemento $b \in B$.

In particolare 1) A è detto dominio di f

2) B è detto codominio di f

3) $b = f(a)$ è detto valore di f nel punto a

dati due insiemi A e B

si può costruire l'insieme $A \times B$

$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A \text{ e } b \in B \}$$

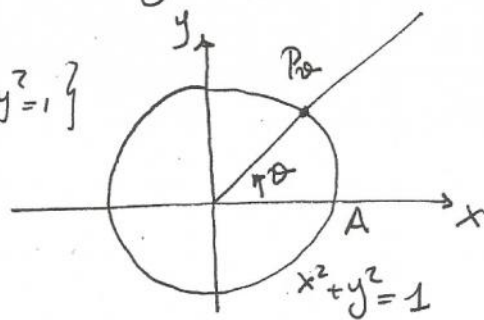
$$G_f = \{ (a, b) \in A \times B : a \in A \text{ e } b = f(a) \}$$

è detto insieme grafico di f .

2] Lo scorso anno abbiamo introdotto due funzioni goniometriche $\sin(\vartheta)$ e $\cos(\vartheta)$ utilizzando la circonferenza unitaria $x^2 + y^2 = 1$

$$\vartheta = \widehat{AOP_0} \quad \text{con } P_0 \in \{x^2 + y^2 = 1\}$$

$$P_0 = (x_0, y_0)$$



allora si definisce

$$x_0 = \cos(\vartheta) \quad \text{e} \quad y_0 = \sin(\vartheta)$$

inoltre si potevano definire

$$\tan(\vartheta) = \frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} \quad , \quad \text{se } \cos(\vartheta) \neq 0 \text{ (C.E.)}$$

e

$$\cotan(\vartheta) = \frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} \quad , \quad \text{se } \sin(\vartheta) \neq 0 \text{ (C.E.)}$$

Come si fa a costruire un grafico 3
di una funzione

i) Si ottiene una campionatura del dominio,
cioè si scelgono dei numeri nel dominio

ii) Si calcolano i valori della funzione
nei punti della campionatura

iii) Si costruisce la tabella con punti e
valori e poi si costruisce il grafico.

Esempio: Cerchiamo di costruire il grafico
di $\sin(x)$ per $x \in [0, 2\pi]$

i) scelgo la seguente campionatura

$$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi$$

ii) calcolo il valore della funzione
 $\sin(x)$ usando la precedente
campionatura

4 ϑ	$\text{sen } \vartheta$	$\text{cos } \vartheta$	$\text{tan } (\vartheta)$	$\text{ctan } (\vartheta)$
0	0	1	0	∞
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/2$	1	0	∞	0
$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	-1
$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$
π	0	-1	0	∞
$7\pi/6$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1	1
$4\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
$3\pi/2$	-1	0	∞	0
$7\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$
$7\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1	-1
$11\pi/6$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$
2π	0	1	0	∞

5] dalla precedente tabella si ha un grafico a "puntini", raffinando la campionatura si può migliorare l'immagine prodotta da grafico a "puntini", svariati programmi permettono di costruire così grafici di funzioni.

→ Alcuni grafici devono essere noti

1)

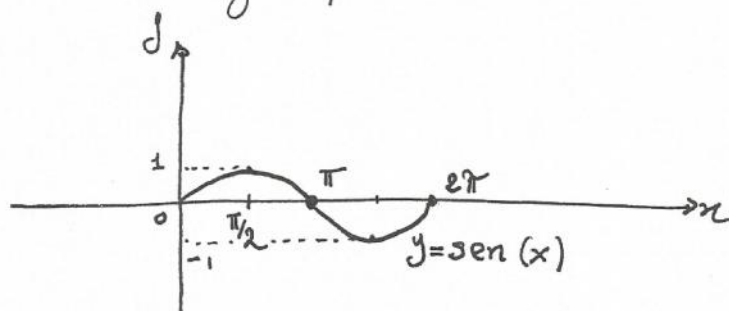


grafico di $\text{sen}(x)$
nell'intervallo $[0, 2\pi]$,

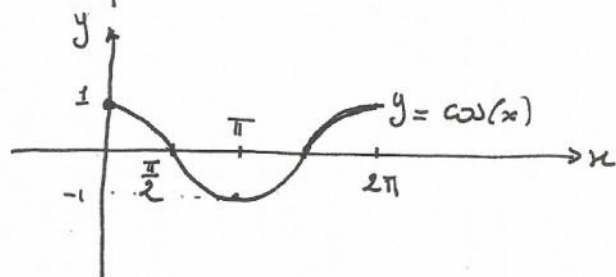


grafico di $\cos(x)$
nell'intervallo $[0, 2\pi]$

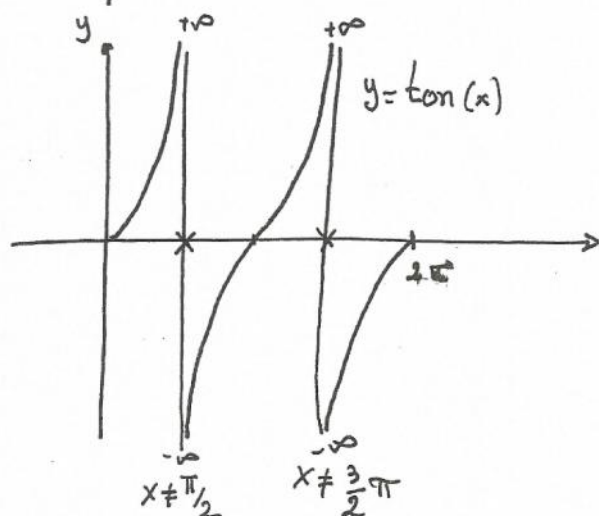
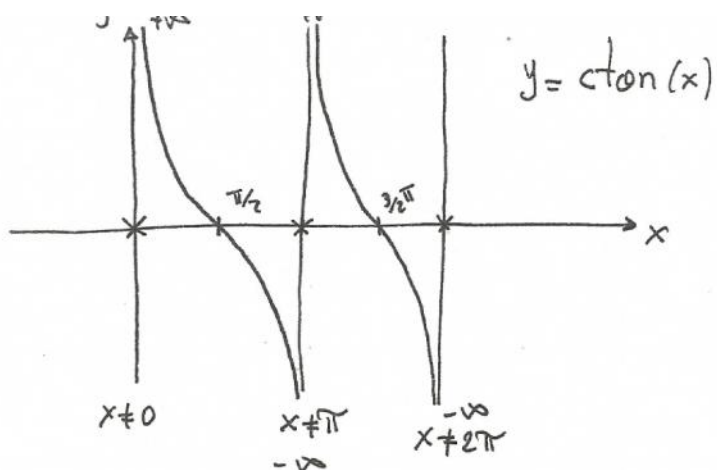


grafico di $\tan(x)$
nell'intervallo $[0, 2\pi]$,



6

grafico di $\cot(x)$
nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

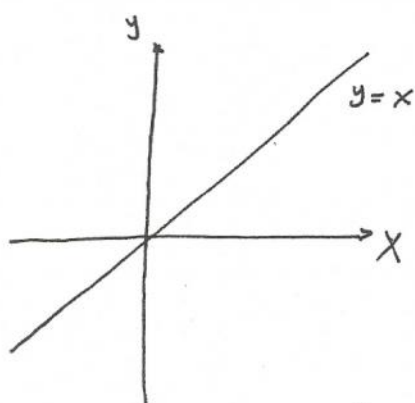


grafico della funzione
identità $y = x$

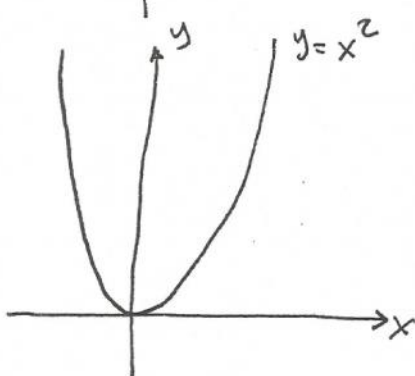


grafico della funzione $y = x^2$

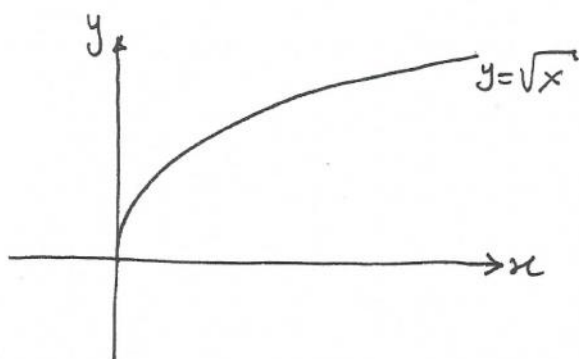


grafico della funzione
radice $y = \sqrt{x}$

7]

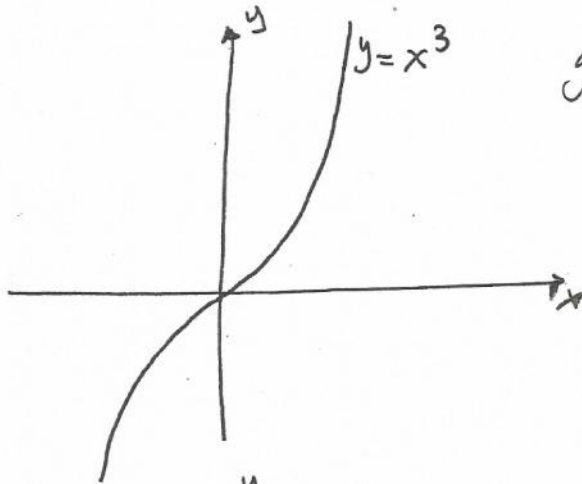


grafico della funzione
cubica $y = x^3$

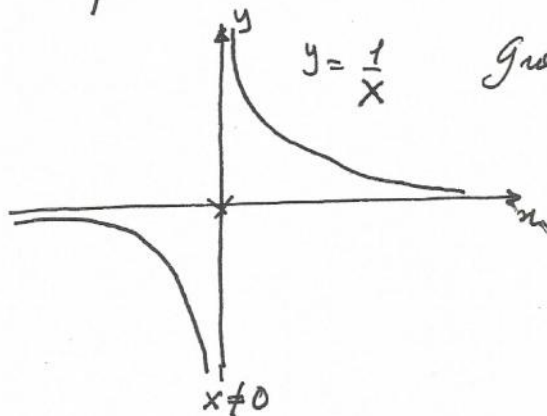


grafico dell'iperbole equilatera
 $y = \frac{1}{x}$ riferita ai
propri asintoti

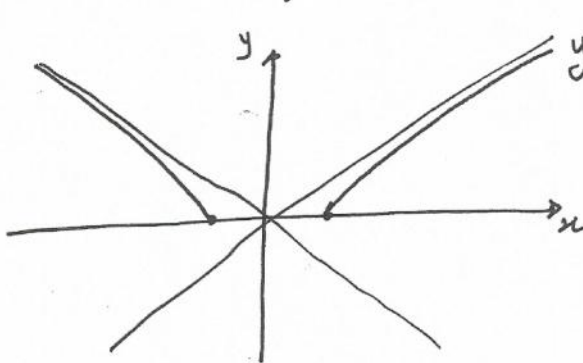


grafico di rami
di iperbole
equilatera riferita
ai propri assi

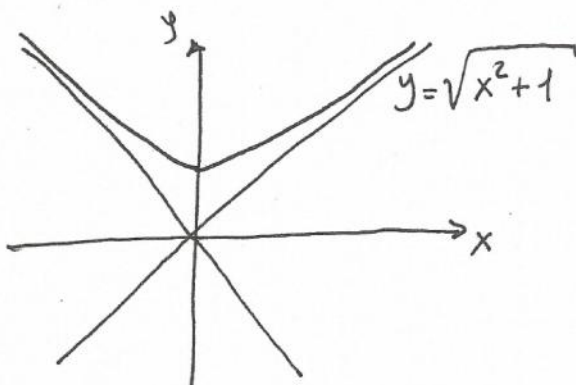


grafico di rami
di iperbole

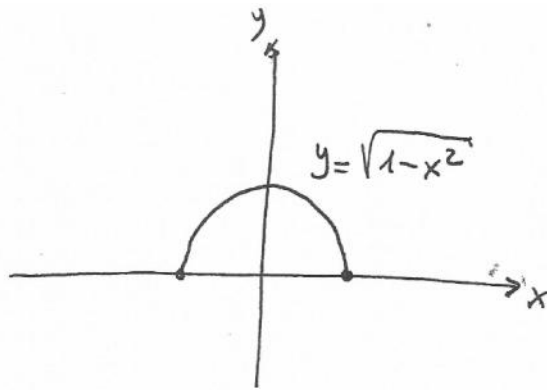


grafico di una
semi circonferenza

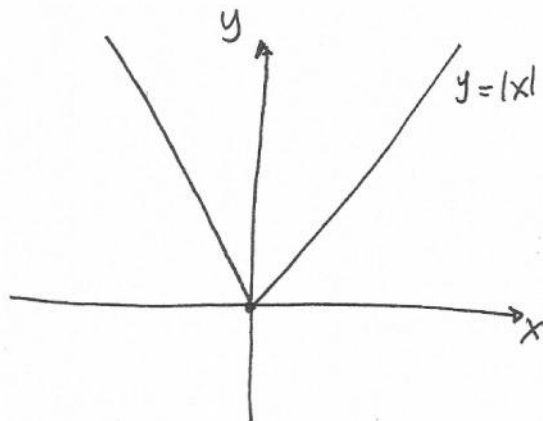


Grafico del
valore assoluto

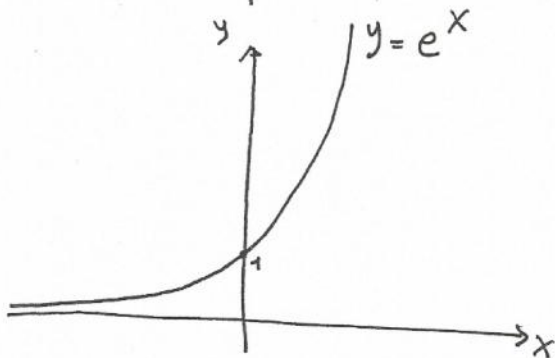


Grafico della funzione
esponenziale naturale

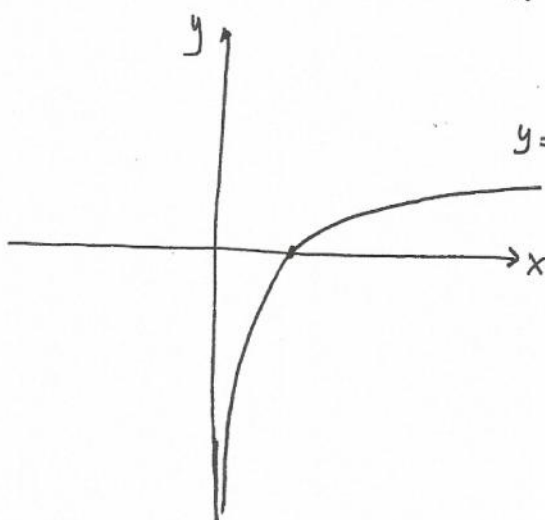


Grafico della
funzione logaritmo
naturale

Alcuni "trucchi" per ottenere informazioni
dei grafici "elementari" L9

$$y = f(x) \rightarrow y = f(x) + a$$

traslazione
verso l'alto (se $a > 0$)
verso il basso (se $a < 0$)

$$y = f(x) \rightarrow y = f(x \pm a)$$

con $a \geq 0$

traslazione laterale
verso destra $-a$
verso sinistra $+a$

$$y = f(x) \rightarrow y = f(ax)$$

con $a \geq 0$

dilatazione del dominio
se $0 < a < 1$
compressione del dominio
se $a > 1$

$$y = f(x) \rightarrow y = a f(x)$$

con $a > 0$

dilatazione dei valori
della funzione se $a > 1$
compressione dei valori
della funzione se $0 < a < 1$

10] Dai grafici delle funzioni si ricavano molte informazioni

- 1) dominio
- 2) segno
- 3) comportamento asintotico
- 4) continuità, derivabilità
- 5) invertibilità

e molte altre. Non solo nella definizione di funzione il concetto di grafico gioca un ruolo essenziale.

definizione (di funzione)

Siano A, B due insiemi non vuoti.

Una funzione da A in B è un sottoinsieme

$G \subset A \times B$ tale che per ogni $a \in A$
esiste un unico $b \in B$ tale che $(a, b) \in G$.

A = dominio di f

B = codominio di f

$G = G_f$ = grafico di f

$b = f(a)$ = valore di f in a

11) Sia $D \subset B$

$f^{-1}(D) = \{a \in A : f(a) \in D\}$ = insieme
retroimmagine
di D tramite f

definizione: $f: A \rightarrow B$ si dice suriettivo se
per ogni $b \in B$ esiste $a \in A$ t.c. $f(a) = b$
cioè $f^{-1}(b) \neq \emptyset \quad \forall b \in B$

definizione: $f: A \rightarrow B$ si dice iniettivo se
per $a_1 \neq a_2$ allora $f(a_1) \neq f(a_2)$

definizione: $f: A \rightarrow B$ si dice biunivoco
se f è iniettivo e suriettivo.

12)
def. $f: A \rightarrow B$ si dice invertibile
se esiste $f^{-1}: B \rightarrow A$ tale che

$$f^{-1}(f(a)) = a \quad \forall a \in A$$

$$f(f^{-1}(b)) = b \quad \forall b \in B$$

$f^{-1}: B \rightarrow A$ è detta funzione inversa di f

Teorema f è invertibile se e solo se
 f è biunivoca