

Appunti di Matematica

Tiziano Granucci

ISTITUTO GOBETTI - VOLTA, VIA ROMA 77, BAGNO A RIPOLI, FIRENZE

E-mail address: `tizianogranucci@libero.it`

URL: `http://tizianogranucci.wix.com/tiziano-granucci`

Contents

Insieme

v

Insiemi

DEFINITION 1. *Un insieme è una collezione di oggetti che sono detti elementi dell'insieme.*

REMARK 1. *Sia A un insieme, con la scrittura $a \in A$ (che leggeremo a appartiene ad A) intendiamo indicare che a è un elemento di A .*

REMARK 2. *Con la scrittura $a \notin A$ (che leggeremo a non appartiene ad A) intendiamo indicare che a non è un elemento di A .*

tra gli insiemi ne esiste uno molto particolare, l'insieme vuoto cioè l'insieme privo di elementi.

DEFINITION 2. *Con il simbolo $\emptyset$ indichiamo l'insieme vuoto, cioè l'insieme privo di elementi.*

Altri esempi di insiemi numerici possono essere i seguenti.

$$(0.1) \quad \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \text{ è l'insieme dei numeri Naturali}$$

$$(0.2) \quad \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \text{ è l'insieme dei numeri Interi}$$

$$(0.3) \quad \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{\dots, -2, -1, 1, 2, \dots\} \text{ è l'insieme dei numeri Interi non nulli}$$

$$(0.4) \quad \mathbb{Q} = \left\{ \frac{N}{D} : N \in \mathbb{Z} \text{ e } D \in \mathbb{Z}^* \right\} \text{ è l'insieme dei numeri Razionali}$$

Più in generale si può definire un insieme utilizzando una proprietà; un esempio è

$$(0.5) \quad A = \{x : P(x)\},$$

tale scrittura si legge A è l'insieme degli elementi x che tali che la proprietà $P(x)$ è vera, cioè gli x che verificano la proprietà $P(x)$.

EXAMPLE 1. *Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : n = 2k \text{ con } k \in \mathbb{N}\}$, si legge A è l'insieme dei numeri naturali n tali che $n = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$, cioè A è l'insieme dei numeri naturali che sono multipli di 2 (Numeri Pari). In particolare si ha $A \subset \mathbb{N}$.*

EXAMPLE 2. *Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : n = 2k + 1 \text{ con } k \in \mathbb{N}\}$, si legge A è l'insieme dei numeri naturali n tali che $n = 2k + 1$ con $k \in \mathbb{N}$, cioè A è l'insieme dei numeri naturali che sono multipli di 2 più 1 (Numeri Dispari). In particolare si ha $A \subset \mathbb{N}$.*

DEFINITION 3. *Siano A e B due insiemi; diremo che B è un sottoinsieme di A [scriveremo $B \subset A$] se ogni elemento di B è un elemento di A ; cioè se $b \in B \implies b \in A$ (che leggeremo se b appartiene a B allora b appartiene ad A).*

EXAMPLE 3. I numeri pari, $2\mathbb{N}$, sono un sotto insieme di $\mathbb{N}$ e scriveremo $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$.

EXAMPLE 4. I numeri multipli di 3, $3\mathbb{N}$, sono un sotto insieme di $\mathbb{N}$ e scriveremo $3\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$.

EXAMPLE 5. I numeri dispari, $2\mathbb{N}+1$, sono un sotto insieme di $\mathbb{N}$ e scriveremo $2\mathbb{N}+1 \subset \mathbb{N}$.

EXAMPLE 6. I numeri naturali sono un sotto insieme dei numeri interi e scriveremo $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

DEFINITION 4. Sia A un insieme allora $\mathcal{P}(A)$ è l'insieme delle parti di A , cioè l'insieme i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di A .

EXAMPLE 7. Sia $A = \{4, 7\}$ allora $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{4\}, \{7\}, \{4, 7\}\}$.

EXAMPLE 8. Sia $A = \{1, 2, 3\}$ allora $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

DEFINITION 5. Sia A un insieme allora con $\#(A)$ è la numerosità di A .

EXAMPLE 9. Sia $A = \{4, 7\}$ allora $\#(A) = 2$.

EXAMPLE 10. Sia $A = \{1, 2, 3\}$ allora $\#(A) = 3$.

LEMMA 1. Sia A un insieme allora

$$(0.6) \quad \#(\mathcal{P}(A)) = 2^{\#(A)}.$$

EXAMPLE 11. Sia $A = \{1, 2, 3\}$ allora $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$, inoltre $\#(\mathcal{P}(A)) = 2^{\#(A)} = 2^3 = 8$.

Esistono insiemi che hanno numerosità infinita tipo $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, ma anche l'insieme dei numeri pari, $2\mathbb{N}$, ha numerosità infinita.

DEFINITION 6. Siano A e B due insiemi con $B \setminus A$ si indica l'insieme degli elementi $b \in B$ tali che $b \notin A$;

$$(0.7) \quad B \setminus A = \{x \in B : x \notin A\}.$$

EXAMPLE 12. Siano $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ allora $B \setminus A = \{4, 5\}$.

EXAMPLE 13. Siano $P = \{n \in \mathbb{N} : n = 2k \text{ con } k \in \mathbb{N}\}$ e $D = \{n \in \mathbb{N} : n = 2k + 1 \text{ con } k \in \mathbb{N}\}$ allora $\mathbb{N} \setminus P = D$ e $\mathbb{N} \setminus D = P$.

DEFINITION 7. Siano A e B due insiemi allora

$$(0.8) \quad A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

EXAMPLE 14. Siano $A = \{-1, -2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ allora $B \cup A = \{-1, -2, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

EXAMPLE 15. Siano $P = \{n \in \mathbb{N} : n = 2k \text{ con } k \in \mathbb{N}\}$ e $D = \{n \in \mathbb{N} : n = 2k + 1 \text{ con } k \in \mathbb{N}\}$ allora $P \cup D = \mathbb{N}$.

DEFINITION 8. Siano A e B due insiemi allora

$$(0.9) \quad A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

EXAMPLE 16. Siano $A = \{-1, -2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ allora $B \cap A = \{3\}$.

EXAMPLE 17. Siano $P = \{n \in \mathbb{N} : n = 2k \text{ con } k \in \mathbb{N}\}$ e $D = \{n \in \mathbb{N} : n = 2k + 1 \text{ con } k \in \mathbb{N}\}$ allora $P \cap D = \emptyset$.

DEFINITION 9. Siano A e B due insiemi allora si dicono *disgiunti* se $A \cap B = \emptyset$.

DEFINITION 10. Sia Ω un insieme una famiglia $\{E_i\}$ di sottoinsiemi di Ω , cioè $E_i \subset \Omega$ per ogni indice i , si dice una *Partizione* di Ω se $\Omega = \bigcup_i E_i$ e inoltre $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$, E_i sono a due a due *disgiunti* tra loro.

DEFINITION 11. Siano A e B due insiemi allora

$$(0.10) \quad A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

è detto *insieme prodotto cartesiano* di A e B .

EXAMPLE 18. Se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{5, 7\}$ allora $A \times B = \{(1, 5), (1, 7), (2, 5), (2, 7)\}$.

REMARK 3. In generale si ha $A \times B \neq B \times A$. Un esempio semplice è dato dal precedente esempio; se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{5, 7\}$ allora $A \times B = \{(1, 5), (1, 7), (2, 5), (2, 7)\}$ mentre $B \times A = \{(5, 1), (5, 2), (7, 1), (7, 2)\}$, quindi $A \times B \neq B \times A$.

REMARK 4. Se $\#(A) = N$ e $\#(B) = M$ allora $\#(A \times B) = NM$.